

Lista 2: Cálculo II

A. Ramos *

April 18, 2019

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Funções reais de várias variáveis;
2. Limites, continuidade, derivadas parciais, derivadas. Regras de cálculo.

1 Exercícios

Faça do livro texto ¹, os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidos em aula.

2 Exercícios adicionais

2.1 Funções reais de várias variáveis

1. Escreva o volume de um cone circular reto como função da altura e a geratriz.

Rpta: $Volume(x, y) = \frac{\pi}{3}(x^2y - y^3)$, onde $x = geratriz$ e $y = altura$. Descreva o domínio.

2. Encontre o domínio, imagem e as curvas de nível da função $f(x, y) = \sin(y - x)$ *Rpta:* Domínio \mathbb{R}^2 , imagem \mathbb{R} curva de nível : *retas paralelas*.

3. Descreva o domínio das seguintes funções

(a) $f(x, y) = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$ *Rpta* União de $\{(x, y) : 2n \leq x^2 + y^2 \leq 2n + 1\}$ para $n \in \mathbb{N}$.

(b) $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$ *Rpta* $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 \geq y\}$.

(c) $f(x, y, z) = \arcsin x + \arcsin y + \arctan z$. *Rpta* $\{(x, y, z) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

(d) $f(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ *Rpta* $B(0, 1) \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

4. Construa as curvas de nível de $z = \arctan \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$, com $a > 0$ fixo. *Rpta:* Família de circunferências.

2.2 Limites e continuidade

1. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & , \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.

2. Prove, usando a definição de limite, que $\lim_{(x,y) \rightarrow (3,-1)} x^2 + y^2 - 4x + 2y = -4$.

3. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{yx^3}{x^4 + y^2} & , \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

A função f é contínua em $(0, 0)$? *Rpta:* Sim. Use $2|a||b| \leq a^2 + b^2$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

¹Livro texto: Cálculo. Volume II. *J. Stewart*, 5 edição.

4. Considere a função

$$f(x, y, u, v) = \begin{cases} \frac{yx}{x^2+y^2+w^2+z^2} & , \text{ se } (x, y, w, z) \neq (0, 0, 0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y, w, z) = (0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

A função f é contínua em $(0, 0, 0, 0)$?

5. Calcule, se existe, os seguintes limites

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$. *Rpta:* 2.

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1+x^2y^2)e^{-1/(x^2+y^2)}$. *Rpta:* 1.

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^3+y^3}$. *Rpta:* Não existe.

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2-3xy+x^2}{x^2+y^2}$. *Rpta:* Não existe.

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{x+\ln(1+xy)}{1+x+y}$. *Rpta:* 2/3.

(f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin xy}{y}$. *Rpta:* 2.

(g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^{-\frac{xy^2+3}{y^2+x^2}}$. *Rpta:* 0.

6. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estude a continuidade de f em \mathbb{R}^2 .

2.3 Derivadas parciais, derivadas direcionais e derivadas e regras da cadeia

1. Encontre as derivadas parciais f_x e f_y de $f(x, y) = xe^{x^2y}$ no ponto $(1, \ln 2)$. *Rpta:* $f_x(1, \ln 2) = 2 + 4 \ln 2$ e $f_y(1, \ln 2) = 2$.

2. Encontrar $D_1f(0, y)$ e $D_2f(x, 0)$, se

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Rpta: $D_1f(0, y) = -y, \forall y$ e $D_2f(x, 0) = x, \forall x$.

3. Quais pontos da superfície $z = xy(1-x-y)$, ao plano tangente é paralelo ao plano xy . *Rpta:* Pontos $(0, 0)$, $1/3(1, 1)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

4. Calcule os planos tangentes da superfícies

(a) $z = x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 2)$; *Rpta:* $z = 2x + 2y - 2$;

(b) $z^2 - 3x^2 - y^2 = 0$ no ponto $(1, 0, 1)$; *Rpta:* $y = z$;

5. Encontre os valores de a e b para que o plano $ax+by+2z+2=0$ seja tangente ao parabolóide $z = y^2+3x^2+1$ no ponto $(1, 1, 5)$. *Rpta:* $a = -12, b = -4$.

6. Mostre que se f é diferenciável no ponto (x, y) e \vec{u} é um vetor unitário. Então

$$\left| \frac{\partial}{\partial \vec{u}} f(x, y) \right| \leq \|\nabla f(x, y)\|.$$

7. Verifique que a função $f(x, y) = x^3y - xy^3$ é harmônica. Isto é, $\partial_{xx}^2 f(x, y) + \partial_{yy}^2 f(x, y) = 0$.

8. Calcule as derivadas parciais de $f(x, y) = \int_x^y \sin(t) dt$. *Rpta:* $\partial_x f = -e^{\sin x}$ e $\partial_y f = e^{\sin y}$.

9. Verifique que $x\partial_x f(x, y) + y\partial_y f(x, y) = 2$, se $f(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$.

10. Para qual valor de θ a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ no ponto $P_0 = (1, 2)$ e na direção $\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$ é a menor possível? Qual é esse valor? *Rpta:* $\theta = \arccos(1/5)$, $\frac{\partial}{\partial \vec{u}} f(1, 2) = -1/2$.
11. Suponha que a temperatura de uma placa é dada por $T(x, y) = xe^{2y} + y^3e^x$.
- (a) Qual direção a temperatura cresce mais rapidamente no ponto $(2, 0)$? Qual é dita variação? Direção = $(1, 4)$, variação = $\sqrt{17}$.
- (b) Qual direção a temperatura decresce mais rapidamente? *Rpta* Direção = $(-1, -4)$.
12. Um ciclista está descendo uma ladeira da forma de um paraboloide $z = f(x, y) = 10 - 2x^2 - 4y^2$. Qual é a direção que deve seguir para descer com a maior rapidez possível quando ele encontra-se no ponto $(1, 1, 6)$? *Rpta:* Direção paralela a $(-1, -2)$.
13. Encontre a equação do plano tangente à superfície $z = e^y \sin(x + z)$ no ponto em que dito plano é paralelo ao $2x + z = 5$. *Rpta:* $z = -2x$ e o ponto é $(0, \ln 2, 0)$
14. Encontrar $D_1f(0, y)$ e $D_2f(x, 0)$, se

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & , \text{ se } xy \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } xy < 0 \end{cases}$$

A função é diferenciável em $(0, 0)$? *Rpta:* $D_1f(0, 0) = 0$ e $D_2f(x, 0) = x$. A função não é diferenciável em $(0, 0)$.

15. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & , \text{ se } xy \geq 0 \\ 0 & , \text{ se } xy < 0 \end{cases}$$

Mostre que não é diferenciável em $(0, 0)$, mas tem derivadas parciais em $(0, 0)$ *Rpta:* Para ver que f não é diferenciável é suficiente verificar que f não é contínua.

16. Capítulo 14, 14. 6 Exercícios 10, 11, 27, 29, 30, 33, 56.

2.4 Regras da cadeia e miscelaneas

1. Seja $f(u, v, w) = u^2 + v^2 + w^2$, onde $u = 2x - 3y + 5z$, $v = x^2 - y^2 + z^2$ e $w = xyz$. Calcule as derivadas parciais $\partial_x f$, $\partial_y f$ e $\partial_z f$ *Rpta:* $\partial_y f = -6u - 4vy + 2xyz$.
2. Considere $f(t)$ uma função real de classe C^2 em todo \mathbb{R} . Se $g(x, y) = x + y + f(x^2 + y^2)$. Verifique que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 4(x^2 - y^2) \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$.
3. Se $z = xy + xe^{y/x}$. Verifique que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$
4. Se $g(r, t) = t^n e^{-r^2/4t}$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial t}$ e $\frac{\partial g}{\partial r}$. Para qual valor de n a seguinte equação vale?

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right\}.$$

5. Capitulo 14, 14.5 Exercícios 35, 36, 37, 39, 40, 42, 44, 51, 56.